தமிழில் கணிதம்: ஒரு முயற்சி

பத்ரி சேஷாத்ரி

bseshadri@gmail.com

எண்கள் - அறிமுகம்

எண்களை நாம் தினமும் பயன்படுத்துகிறோம். காசு கொடுத்துக் காய்கறி வாங்க. மீதி கொடுக்க. மணி பார்க்க. இவ்வளவு பழக்கமானதால், எண்கள் சுலபமானவைதானே என்று தோன்றிவிடுகிறது. ஆனால் எண்கள் கவனமாகப் புரிந்துகொள்ளப்பட வேண்டியவை.

எண்ணும் எண்கள், 1, 2, 3 ஆகியவை என்பது நமக்குத் தெரியும். நம் கண்ணுக்குத் தெரியும், முழுமையான பொருள்களின் எண்ணிக்கை அவை. கையில் இருக்கும் விரல்கள், செடியில் இருக்கும் பூக்கள், வயலில் மேயும் ஆடுகள். கணிதத்தில் இவற்றை முழு எண்கள் (Integers) என்கிறோம். பல ஆரம்பகால சமூகங்களுக்கு இந்த முழு எண்கள் மட்டுமே தெரிந்திருந்தன.

அதன்பின் பின்னங்கள் இயல்பாகவே கண்டறியப்பட்டன. கையில் இருப்பது ஒரு மாம்பழம். அதை சகோதரனுடன் பகிர்ந்துகொள்ளவேண்டும். என்ன செய்வது? அந்த மாம்பழத்தை இரண்டாக வெட்டவேண்டும். ஒன்றை இரண்டாக்க வேண்டும். அப்படி வெட்டிய ஒரு பகுதி, இரண்டில் ஒரு பாகம். சுமார் 2500 ஆண்டுகளுக்கு முன் வாழ்ந்த கிரேக்கர்கள், எண்களை இரண்டு வகையாகப் பிரித்தனர். முழு எண்கள், பின்னங்கள். பின்னங்களைக் கீழ்க்கண்ட வகையில் எழுதுகிறோம்.

$\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{17681}{234567}$

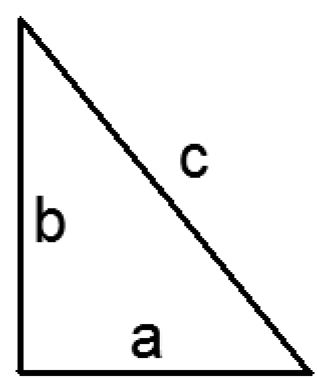
இவற்றுக்கு விகிதமுறு பின்னங்கள் (Rational Numbers, fractions) என்று பெயர்.

பித்தாகோரஸ் - இவரது பெயரால் ஒரு கணிதத் தேற்றம் வழங்கப்படுகிறது - சுமார் 2,500 ஆண்டுகளுக்கு முன் வாழ்ந்தவர். இவர் வர்க்க எண்கள் எனப்படும் எண்களைப் பற்றி ஆராய்ந்தார். ஓர் எண்ணை அதே எண்ணால் பெருக்கினால் கிடைப்பது வர்க்கம். 2-ஐ 2-ஆல் பெருக்கினால் கிடைப்பது 4. 2-ன் வர்க்கம் 4. அதேபோல, 9 = 3x3, 16=4x4.... இவற்றைக் கீழ்க்கண்ட கணிதக் குறியீட்டு முறையில் குறிக்கிறோம்.

$2^2 = 2x2 = 4$

$\sqrt{4} = 2$

இந்த வர்க்க எண்களான 4, 9, 16 ஆகியவற்றைப் பார்த்துவந்த பித்தாகோரஸ் இவற்றில் இரண்டு வர்க்க எண்களைக் கூட்டினால், மற்றொரு வர்க்க எண் வருவதைக் கண்டார். அப்படிப்பட்ட எண்களை அவர் முக்கோணம் ஒன்றுடன் இணைத்துப் பார்த்தார். இந்த மூன்று எண்களும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமாக இருப்பதைக் கண்டார். இதைத்தான் பித்தாகோரஸ் தேற்றம் என்கிறோம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் a, b மற்றும் c என்றால்,



$a^2 + b^2 = c^2$

பித்தாகோரஸும் அவரது சீடர்களும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் விடைகளாக பல முழு எண்களைக் கண்டுபிடித்தனர்.

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

ஒருநாள் பித்தாகோரஸின் சீடன் ஒருவன் அதிர்ச்சியான ஒரு விஷயத்தைக் கண்டுபிடித்தான். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளம் 1, 1 என்று இருந்தால், மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் ஒரு விகிதமுறு பின்னமாக இருக்காது என்பதே அது.

அதாவது, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்துக்கு $a = b = 1$ என்று வைத்துக்கொள்ளுங்கள். அப்படியென்றால்,

$c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$c = \sqrt{2}$

இங்கே $\sqrt{2}$ என்பதை இரண்டு முழு எண்களின் விகிதமாக - அதாவது விகிதமுறு பின்னமாக - எழுதமுடியுமா?

முடியாது என்று சொன்னதால் அந்தச் சீடன் அடித்தே கொல்லப்பட்டான் என்கிறார்கள். காரணம், பித்தாகோரஸ் அப்படிப்பட்ட “கெட்ட” எண்கள் இருக்கமுடியாது என்று தீவிரமான நம்பிக்கை வைத்திருந்தார். ஆனால் அந்த நம்பிக்கை பொய்யானது. ஏன் இந்த எண்ணை விகிதமாக, இரண்டு முழு எண்களின் பின்னமாகக் கொடுக்கமுடியாது என்பதை நாளை பார்ப்போம்.

விகிதமுறா எண்கள்

நேற்று, $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணைப் பற்றிப் பார்த்தோம். அதை இரண்டு முழு எண்களின் பின்னமாகக் கொடுக்கமுடியுமா என்ற கேள்வியை எழுப்பினோம்.

ஒற்றைப்படை எண்களும் இரட்டைப்படை எண்களும்

1, 3, 5, 7 போன்ற எண்களை ஒற்றைப்படை எண்கள் என்கிறோம். 2, 4, 6, 8 போன்ற இரண்டால் முற்றிலுமாக வகுபடக்கூடிய எண்களை இரட்டைப்படை எண்கள் என்கிறோம். ஒற்றைப்படை எண்களை இரண்டால் முற்றிலுமாக வகுக்கமுடியாது. மீதி வரும். இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களைக் கூட்டினால் வருவது இரட்டைப்படை எண். அதேபோல இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களைக் கூட்டினால் கிடைப்பதும் இரட்டைப்படை எண்ணே. ஆனால் ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணையும் ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணையும் கூட்டினால் கிடைப்பது ஒற்றைப்படை எண். சில எண்களை எடுத்து கூட்டிப் பார்த்து உறுதி செய்துகொள்ளுங்கள்.

அடுத்து இந்த ஒற்றை, இரட்டைப்படை எண்களை வைத்து பெருக்கிப் பாருங்கள். இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களைப் பெருக்கினால் கிடைக்கும் விடை ஒற்றைப்படை எண். இரண்டு இரட்டைப்படை எண்களைப் பெருக்கினால் கிடைப்பது இரட்டைப்படை எண். ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணையும் ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணையும் பெருக்கினால் கிடைப்பது இரட்டைப்படை எண்.

இதை வைத்துப் பார்த்தால், ஓர் எண்ணின் வர்க்கம் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் அந்த எண்ணுமே இரட்டைப்படை எண்ணாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்று புரியும்.

இப்பொழுது நாம் எடுத்துக்கொண்ட அடிப்படைக் கேள்விக்கு மீண்டும் வருவோம்.

எந்த பின்னத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் அதற்கென சுருக்கப்பட்ட ஒரு வடிவம் உள்ளது. $\frac{p}{q}$ என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். இங்கு p, q இரண்டுமே முழு எண்கள். இவை இரண்டையும் r என்ற சிறிய எண்ணால் வகுக்க முடியும் என்றால், அந்த வகுத்தலைச் செய்துவிடவேண்டும்.

உதாரணத்துக்கு, $\frac{4}{6}$-ஐ எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். 4, 6 ஆகிய இரண்டு எண்களையும் 2-ஆல் வகுக்கமுடியும். எனவே வகுத்துவிடுங்கள். நமக்குக் கிடைப்பது $\frac{2}{3}$. இனி, 2, 3 ஆகியவற்றை இவற்றைவிடச் சிறிய எண் எதனாலும் வகுக்க முடியாது. இதுதான் இந்த பின்னத்தின் மிகவும் சுருக்கப்பட்ட வடிவம். இதற்குமேல் இந்த பின்னத்தை சுருக்க முடியாது.

இப்போது, $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணை விகிதமுறு பின்னமாக எழுதமுடியும் என்று நினைத்துக்கொள்வோம்.

அதாவது, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

இங்கு மேலே குறிப்பிட்டுள்ள பின்னம், மிகவும் சுருக்கப்பட்ட வடிவிலானது. இதற்குமேல் இந்த பின்னத்தைச் சுருக்கமுடியாது. இப்போது, இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கம் செய்யுங்கள்.

$2 = \frac{p^2}{q^2}$

அல்லது, $p^2 = 2q^2$

நாம் ஏற்கெனவே பார்த்ததுபோல, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால், அந்த எண்ணுமே இரட்டைப்படை எண். எனவே $p = 2m$ என்று வருமாறு m என்ற எண் இருக்கவேண்டும். அப்படியென்றால்,

$p^2 = 4m^2$

அல்லது, $q^2 = 2m^2$

அப்படியென்றால், q கூட இரட்டைப்படை எண்ணாகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

அதாவது, p, q ஆகிய இரண்டுமே இரண்டால் வகுபடக் கூடியவை. அப்படியென்றால் அந்த பின்னத்தை மேலும் சுருக்கமுடியும். ஆனால் இது நாம் ஏற்கெனவே இந்த பின்னத்தை இதற்குமேல் சுருக்கமுடியாது என்று சொல்லியிருந்தோம். எனவே $\sqrt{2}$ என்பதை விகிதமுறு பின்னமாக எழுத முடியாது என்ற முடிவுக்கே நாம் வரவேண்டும்.

இப்படிப்பட்ட எண்களை விகிதமுறா எண்கள் (Irrational numbers) என்று சொல்வோம். ஒவ்வொரு முழு எண்ணுடைய வர்க்கமூலம், ஒன்று மற்றொரு முழு எண்ணாக இருக்கும், அல்லது விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கும். (2, 3 ஆகியவற்றின் வர்க்கமூலம் விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கும். ஆனால் 4-ன் வர்க்கமூலம் 2. மீண்டும் 5, 6, 7, 8 ஆகியவற்றின் வர்க்கமூலம் விகிதமுறா எண்கள். 9-ன் வர்க்கமூலம் 3. எந்த முழு எண்ணின் வர்க்கமூலமும் இப்படித்தான் இருக்கும் என்பதை எப்படி நிரூபிப்பது என்று யோசியுங்கள்.)

நாம் மேலே பார்த்த நிரூபணத்தை முதலில் எழுதிவைத்தவர் யூக்ளிட் என்பவர். சுமார் 2300 ஆண்டுகளுக்குமுன் கிரேக்கத்தில் வாழ்ந்தவர். அலெக்சாண்டிரியா பல்கலைக் கழகத்தின் பேராசிரியராக இருந்தவர். Elements என்ற புத்தகத்தை எழுதினார். இதில் அதுவரையில் தெரிந்திருந்த பல கணித உண்மைகளைத் தொகுத்து வைத்தார். யூக்ளிட் பற்றி நாம் நிறையத் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும். இவரை மீண்டும் மீண்டும் பார்க்கப்போகிறோம்.

ஓர் எண்ணுக்கு வர்க்கத்தைப் போன்றே, வெவ்வேறு படிகள் உண்டு. வர்க்கம் என்பது இரண்டாம் படி. கனம் என்றால் மூன்றாம் படி. அதாவது ஓர் எண்ணை மூன்றுமுறை அதனாலேயே பெருக்கவேண்டும். 2^3 என்றால் 2x2x2 = 8. 3^3 என்றால் 3x3x3 = 27. வர்க்கமூலத்தைப் போன்றே கனமூலம் உண்டு. 8-ன் கனமூலம் 2. 27-ன் கனமூலம் 3. இரண்டாம்படி, மூன்றாம்படி போன்று எத்தனை படிகள் வேண்டுமானாலும் மேலே போய்க்கொண்டே இருக்கலாம். 2-ஐ ஐந்துமுறை பெருக்கினால் - அதாவது 2x2x2x2x2 = 32 - கிடைப்பது 2-இன் ஐந்தாம் படி. முழு எண்களின் வர்க்கமூலங்களைப் போன்றே கனமூலங்கள், நான்காம், ஐந்தாம் மூலங்கள் ஒன்று முழு எண்ணாக இருக்கும், அல்லது விகிதமுறா எண்களாக இருக்கும். இப்படி உருவாகும் விகிதமுறா பின்னங்கள் அனைத்தையும் பலபடிச் சமன்பாடுகளின் விடைகளாகப் பார்க்கமுடியும்.

பலபடிச் சமன்பாடுகள் (Polynomial Equations) என்றால் என்ன என்று நாளை பார்ப்போம்.

இருபடிச் சமன்பாடுகள்

பலபடிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிப் பேசத் தொடங்கினோம். x என்பது ஒரு மாறி (variable) என்றால், அதன் வர்க்கம், கனம், நான்காம் படி ஆகியவற்றை x^2, x^3, x^4 என்று எழுதலாம். இந்தப் படிகளை வெவ்வேறு எண்களால் பெருக்கி, இவற்றையெல்லாம் கூட்டினால் நமக்குக் கிடைப்பது அந்த மாறி x -ன் சார்பு (function). இந்தச் சார்புக்கு n வரிசை கொண்ட பலபடிச் சார்பு (polynomial function) என்று பெயர். இப்படிக் கிடைக்கும் பலபடிச் சார்பை சுழியத்துக்கு (Zero) சமப்படுத்தினால் கிடைப்பது n வரிசையுடைய பலபடிச் சமன்பாடு.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0$

இந்தச் சமன்பாட்டில் $n = 1$ என்றால் நமக்குக் கிடைப்பது மிக எளிதான ‘ஒருபடிச் சமன்பாடு'.

$a_0 + a_1x = 0$

இந்தச் சமன்பாட்டுக்கு மிக எளிதான விடை உள்ளது.

$x = -\frac{a_0}{a_1}, a_1 \neq 0$

ஒருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு அடுத்தது, இருபடிச் சமன்பாடு (quadratic equation).

$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$

பொதுவாக கணிதப் புத்தகங்களில் இந்தச் சமன்பாட்டை இப்படி எழுதியிருப்பார்கள்:

$ax^2 + bx + c = 0$

இரண்டுமே ஒன்றுதான். இரண்டிலும் கெழுக்கள் (co-efficients - x^n-க்கு முன் இருக்கும் a_n) வேறு குறியீடுகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. n வரிசையுள்ள ஒரு பலபடிச் சமன்பாட்டுக்கு n விடைகள் உள்ளன என்று நிரூபிக்கலாம். அதாவது, இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு விடைகள். அப்படியென்றால் என்ன அர்த்தம்? x என்னும் மாறி எந்த மதிப்பையும் எடுத்துக்கொள்ளலாம் என்று பார்த்தோம். x எந்த மதிப்பை எடுத்துக்கொண்டாலும், இடதுபக்கம் உள்ள பலபடிச் சார்பு, சுழியமாகுமா? ஆகாது. x, குறிப்பிட்ட இரண்டு மதிப்பை எடுக்கும்போதுதான் இருபடிச் சார்பு, சுழியம் என்னும் மதிப்பைப் பெறும். x பிற மதிப்புகளை எடுத்துக்கொள்ளும்போது இருபடிச் சார்பின் மதிப்பு சுழியமாக இல்லாமல் வேறு மதிப்புகளைப் பெறும். மேலே குறிப்பிட்ட இருபடிச் சார்பு, x என்ற மாறி, p, q ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறும்போது சுழியமாகிறது என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியென்றால்,

$(x - p)(x - q) = 0$

அல்லது, $x^2 - (p + q)x + pq = 0$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டை முதலில் எழுதிய இருபடிச் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், நாம் இவ்வாறு சொல்லமுடியும்:

$p + q = -\frac{b}{a}$

$pq = \frac{c}{a}$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் கொண்டு, p, q ஆகியவற்றை a, b, c ஆகியவை மூலம் கொடுக்கமுடியும்.

$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$

$(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$

$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = \frac{b^2-4ac}{a^2}$

இரண்டு பக்கத்துக்கும் வர்க்கமூலம் எடுத்தால், கிடைப்பது:

$p - q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

இப்போது, p, q ஆகியவற்றைப் பெறலாம்:

$p = \frac{(p+q)+(p-q)}{2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$q = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

பள்ளிக்கூடத்தில் கணிதம் படிக்கும்போது இவற்றைப் பார்த்த ஞாபகம் வருகிறதா? இந்தத் தீர்வை பல இடங்களில் மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்துவோம். ஒரு பலபடிச் சமன்பாட்டின் விடைகள், அந்தச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனப்படும்.

இப்போது விகிதமுறா எண்களுக்கு (irrational numbers) மீண்டும் வருவோம். எல்லா விகிதமுறா எண்களையும் பலபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களாகப் பார்க்கமுடியும். இந்தச் சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் (co-efficients) விகிதமுறும் எண்களாக இருந்தாலும்கூட, மூலங்கள் விகிதமுறா எண்களாக வரும். உதாரணத்துக்கு $\sqrt{2}$ என்பது $x^2 - 2 = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும். மற்றொரு மூலம் $-\sqrt{2}$.

இப்போது மொத்தம் மூன்றுவிதமான எண்கள் இருப்பதாக நீங்கள் நினைக்கலாம். ஒன்று முழு எண்கள். இரண்டு விகிதமுறு எண்கள் (பின்னங்கள்). மூன்றாவதாக பலபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களான விகிதமுறா எண்கள்.

ஆனால் உண்மை அதுவன்று! இந்த எண்களுக்குள் சிக்காத பல எண்கள் உள்ளன. அப்படிப்பட்ட எண்களில் இரண்டு மிகவும் சுவாரசியமான எண்களை நாளை பார்ப்போம்!

எண் குறியீடு

நாம் பல்வேறு எண்களைப் பற்றிப் பேசிக்கொண்டிருக்கிறோம். ஆனால் முந்தைய காலங்களில் இந்த எண்கள் எப்படிக் குறிப்பிடப்பட்டிருந்தன என்பதைப் பற்றி இதுவரை பேசவில்லை. கிரேக்கர்கள் வரைகணிதம், எண்கள் ஆகியவற்றைப் பற்றி நிறைய விஷயங்களை ஆராய்ந்து கற்றிருந்தனர். ஆனால் அவர்கள் புழங்குவதற்கு மிகவும் கடினமான எண் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினர். கிரேக்க எண் குறியீடுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு இருந்தது. அதாவது, Ι=1, Π=5, Δ=10, ΠΔ=50, Η=100, ΠΗ=500.

இடதுபுறம் இருப்பது கிரேக்க எழுத்துகள். Ι என்பதை அயோட்டா என்று உச்சரிக்கவேண்டும். Π என்றால் பை. Δ என்றால் டெல்ட்டா. Η என்றால் ஈட்டா.

கி.மு. நான்காம் நூற்றாண்டில் ஒரு புதிய முறை கிரேக்கத்தில் புகுத்தப்பட்டது. 1, 2, 3 ... 9 ஆகிய எண்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு குறியீடு. 10, 20, 30 ... 90 ஆகிய ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு குறியீடு. அதேபோல, 100, 200, 300 ... 900 ஆகியவற்றுக்கு. மொத்தம் 27 குறியீடுகள் தேவைப்பட்டன. ஆனால் கிரேக்க மொழியில் இருந்ததோ 24 எழுத்துக்கள்தான். எனவே அந்த 24-உடன் மேலும் மூன்று பழைய எழுத்துக் குறியீடுகளைச் சேர்த்துக்கொண்டனர். 1,000-ஐ விடச் சிறிய எந்த எண்ணையும் இவற்றைக்கொண்டு குறிப்பிடலாம். 435 என்ற எண்ணை 400(υ)+30(λ)+5(ε) என்று எழுதிவிடுவார்கள். அதாவது υλε.

அந்தக் காலப் பள்ளிக் குழந்தைகளை நினைத்துப் பாருங்கள்! எவ்வளவு பாவமாக இருந்திருக்கும்? சரி, 999 வரை ஒப்பேற்றிவிடலாம். அதற்குமேல்? இந்தக் குறியீடுகளையே வைத்து 1,000-கள், 10,000-கள், 100,000-கள் ஆகியவற்றைக் குறித்தார்கள். ஆனால் அந்தக் குறியீட்டின்முன் ஒரு சின்ன கோடு இருக்கும்.

ரோமானியர்களும் இதைப்போன்றே ஒரு எண் குறியீட்டை வைத்திருந்தனர். இன்றும்கூட இந்தக் குறியீடு புழக்கத்தில் உள்ளது, கடிகாரங்கள் சிலவற்றில் பார்க்கலாம். இப்போது புழக்கத்தில் உள்ள ரோமானிய எண் குறியீட்டில், I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000. 2008-ம் ஆண்டு என்பதை MMVIII என்று குறிப்பிடுகிறோம். நாம் மேலே பார்த்த 435-ஐ CDXXXV என்று குறிப்பிடுகிறோம். இங்கே CD = D-C = 500-100=400. XXX = 30. V=5. CDXXXV என்ற எண்ணை MMVIII என்ற எண்ணால் பெருக்கவேண்டும் என்றால் என்ன ஆகும் என்று யோசித்துப் பாருங்கள்!

இப்போது புழக்கத்தில் இருக்கும் எண்கள் இந்தியாவில் தோன்றின. அரேபியா வழியாக ஐரோப்பாவுக்குச் சென்றன. இந்த எண் முறைக்கு ஹிந்து-அராபிக் எண்கள் என்று பெயர். எண்கள் அனைத்தும் பத்தடிமானத்தில் (decimal) வழங்கப்பட்டன. மொத்தம் 10 குறியீடுகள் மட்டுமே தேவை. 1 முதல் 9 வரை, கூடவே '0' (சுழியம்). முதல்முறையாக '0' என்ற எண்ணுக்கு ஒரு குறியீடு கொடுக்கப்பட்டது.

கிரேக்க, ரோமானியர்கள் சுழியத்தை சரியாகப் புரிந்துகொள்ளவில்லை. இந்த எண் இந்திய கணித வல்லுனர்களால் பயன்படுத்தப்பட்டது. கி.மு. 400 முதல் கி.பி. 400-க்குள் இந்த எண்கள் இந்தியாவில் தோன்றியிருக்கவேண்டும் என்று கணிக்கிறார்கள். 0-9-க்கான குறியீடுகள் தொடக்கத்தில் பிராமி வரிவடிவத்தில் இருந்தன.

கி.பி. 825-ல் அல் க்வாரிஸ்மி என்பவர் பாரசீக மொழியில் 'ஹிந்து எண்களை வைத்துக் கணக்கிடுவது' என்ற புத்தகத்தை எழுதினார். இந்தப் புத்தகம் 12-ம் நூற்றாண்டில் லத்தீன் மொழிக்கு மாற்றப்பட்டது (Algoritmi de numero Indorum). அங்கிருந்து ஃபிபனோச்சி என்ற இத்தாலிய கணித வல்லுனர் மூலம் ஐரோப்பா முழுவதும் பரவியது. ஃபிபனோச்சி பற்றி மேலும் பார்க்கப்போகிறோம்.

இந்தியாவில் பிராமி வரிவடிவத்தில் இருந்த எண்கள் பின்னர் தேவநாகரி வடிவிலும் தமிழ் வடிவிலும் எழுதப்பட்டன. அராபியர்கள் தேவநாகரி வடிவைப் பின்பற்றி தங்களது வரிவடிவத்தை ஏற்படுத்திக்கொண்டனர். ஐரோப்பியர்கள் அரேபிய வடிவத்தை மாற்றினர். இன்று, இப்போது நாம் வழங்கும் வடிவம் முந்தைய ஐரோப்பிய வடிவங்களிலிருந்து இறுதியாக உருவானது.

தமிழ் எண் வடிவங்கள் இன்று முற்றிலுமாக அழிந்துவிட்டன. யூனிகோட் எழுத்துருவில் இவற்றைக் காணலாம். ஆனால் தேவநாகரி எண் வடிவங்கள் இன்றும் வட இந்திய பேருந்துகளில் காணப்பட்டு நமக்குப் பெரும் தொல்லையைக் கொடுக்கின்றது. அரேபிய நாடுகளில் இன்றும் அவர்களது எண் வரி வடிவங்கள் பயன்படுத்தப்படுவதாகக் கேள்வி.

சுழியமும் எதிர் எண்களும்

சமஸ்கிருதத்தில் சூன்ய, அரபியில் ஸிஃப்ர், இத்தாலி மொழியில் ஸெஃபிரோ, பிரெஞ்சில் ஸெரோ, ஆங்கிலத்தில் ஸீரோ எனப்படுவது, தமிழில் பூஜ்யம், சுழி, சுழியம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

கி.பி. 628-ல் பிரம்மகுப்தர் தான் எழுதிய ப்ரஹ்மஸ்புட சித்தாந்தம் என்ற நூலில் சுழியத்தையும் எதிர் எண்களையும் (negative numbers) எப்படிப் பயன்படுத்துவது என்று குறிப்பிடுகிறார். அவற்றுக்கான 'அல்ஜீப்ரா' விதிகளையும் விளக்குகிறார்.

சுழியத்தையும் எதிர் எண்ணையும் கூட்டினால் கிடைப்பது எதிர் எண். சுழியத்தையும் நேர் எண்ணையும் (positive number) கூட்டினால் கிடைப்பது நேர் எண். சுழியத்தை, சுழியத்துடன் கூட்டினால் கிடைப்பது சுழியம். இவ்வாறு தொடங்கி, இந்த எண்களைப் பெருக்கினால் என்ன ஆகும், கூட்டினால் என்ன ஆகும் என எல்லாவற்றையும் விளக்குகிறார் பிரம்மகுப்தர்.

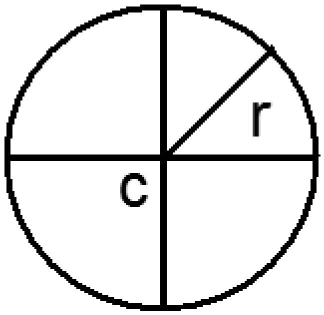
அதற்கு சில நூற்றாண்டுகள் கழித்து பாஸ்கரர் (2) என்பவர், 12-ம் நூற்றாண்டில் அரிதமேட்டிக், அல்ஜீப்ரா ஆகியவற்றை விளக்கி லீலாவதி, பீஜகணிதம் என்ற இரண்டு புத்தகங்களை எழுதினார். இவர் பின்னர் சித்தாந்த சிரோமணி என்ற புத்தகத்தில் கோள வடிவப் பொருள்கள் பற்றியும் வானியல், கோள்களின் நடமாட்டம் பற்றியும் எழுதினார்.

நாம் நேற்று பார்த்த இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வை முதலில் கொடுத்தவர் பாஸ்கரர்தான். இத்துடன், முப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு, அதற்கு மேற்பட்ட பலபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கமுடியுமா முடியாதா போன்ற பலவற்றை பாஸ்கரா லீலாவதியில் எழுதியுள்ளார். இவற்றை நாம் பின்னர் பார்க்கப் போகிறோம். இந்த சமஸ்கிரித நூல்களின் ஆங்கில மொழியாக்கம் ஹென்றி தாமஸ் கோல்புரூக் என்பவரால் செய்யப்பட்டு (Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sankrit of Brahmagupta and Bhaskara) கிடைக்கிறது.

அடுத்த சில பதிவுகளில் நாம் முன்னர் குறிப்பிட்டிருந்த சில முக்கியமான எண்களைப் பற்றி பேசுவோம்.

π (பை)

இயற்கையில் மிகச்சில வடிவங்களால் மட்டுமே வட்டம் அல்லது கோளத்துடன் போட்டிபோட முடியும்.



வட்டம் என்பது மிகக் கச்சிதமான ஒரு வடிவம். c என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். r நீளமுள்ள ஒரு கயிறை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். அனந்தக் கயிற்றின் ஒரு முனையை c-யில் வைத்து, கயிற்றை இழுத்துப் பிடித்து மறுமுனையை c-ஐச் சுற்றிவருமாறு செய்யுங்கள். உங்களுக்குக் கிடைக்கும் வடிவம்தான் வட்டம். இதே ஐடியாவை முப்பரிமாணத்தில் செய்து பாருங்கள். உங்களுக்குக் கிடைப்பது கோளம். மையத்திலிருந்து வெளிப்புறத்தில் உள்ள எந்தப் புள்ளிக்குமான தூரம் r ஆக இருக்கும்.

நாம் வாழும் பூமி கிட்டடத்தட்ட கோள வடிவமானது. வானில் இருக்கும் பல பொருள்களும் கிட்டடத்தட்ட கோள வடிவமானவை. ஒரு துளி நீர் கீழே சொட்டும்போது கோள வடிவை எடுத்துக்கொள்கிறது. (ஈர்ப்பு விசை காரணமாக அந்தக் கோளம் சற்றே மாறுபடும்.)

வட்டத்துக்கு அப்படி என்ன பெருமை? ஒரு கதை சொல்வார்கள். ஓர் அரசன், தன் அவையில் இருந்த புத்திசாலி ஒருவனை மெச்சி, அவனுக்குப் பரிசு கொடுக்க விரும்பினானாம். ஒரு நீண்ட கயிற்றை அவனிடம் கொடுத்து, இந்தக் கயிற்றால் எவ்வளவு இடத்தைச் சுற்றி வளைத்துக்கொள்ள முடியுமோ, அவ்வளவு இடத்தையும் நீயே வைத்துக்கொள்ளலாம் என்றானாம். குறிப்பிட்ட சுற்றளவால் சூழப்பட்ட இடம் மிக அதிகமானதாக இருக்கவேண்டுமானால், அது எந்த வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும்? வட்டம் என்பதுதான் இதற்கான விடை. அதேபோல குறிப்பிட்ட பரப்பளவால் சூழப்பட்ட கொள்ளிடம் மிக அதிகமானதாக இருக்கவேண்டுமானால், அந்த வடிவம், கோளமாக இருக்கவேண்டும்.

இதையே மாற்றிச் சொல்வதானால், கொடுத்த கொள்ளளவுக்கு, மிகக் குறைந்த பரப்பளவை எடுத்துக்கொள்ளக்கூடிய வடிவம் என்ன என்ற கேள்வியை எழுப்பலாம். விட - கோளம்.

இதுபோன்ற பெருமம் (maxima), சிறுமம் (minima) ஆகியவற்றை கால்குலஸ் எனப்படும் கணிப்பியல் பற்றிப் பார்க்கும்போது எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்போதைக்கு வட்டத்துக்கு மீண்டும் வருவோம். ஒரு வட்டத்துக்கு r என்பது ஆரமாக (radius) இருந்தால், அந்த வட்டத்தின் சுற்றளவு என்ன? அல்லது, ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவுக்கும் அதன் ஆரத்துக்குமான விகிதம் என்ன? வசதிக்காக, ஆரம் என்பதைவிட விட்டம் (diameter = ஆரத்தைப்

போல இருமடங்கு) என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம். வட்டத்தின் சுற்றளவுக்கும் அதன் விட்டத்துக்குமான விகிதம் என்ன?

இந்தக் கேள்விக்கான விடை சுமார் 3,000 ஆண்டுகளுக்கு முன்னதாகவே பல பழமையான சமூகங்களுக்குத் தெரிந்திருந்தது. பாபிலோனியர்கள், எகிப்தியர்கள், பழைய ஏற்பாட்டு இஸ்ரவேலர்கள், கிரேக்கர்கள், வேதகால இந்தியர்கள், சீனர்கள் என அனைவரும் இதற்கான விடையை அறிந்திருந்தனர். இன்று நாம் இந்த விகிதத்தை π என்று எழுதுகிறோம். 'பை' என்று அழைக்கிறோம்.

அனைவருக்கும் இது என்ன என்று தெரிந்திருந்தாலும், இதற்கான சரியான விடையைக் கண்டுபிடிக்க கஷ்டப்பட்டனர். அப்போதைய மக்களுக்கு விகிதமுறு பின்னங்கள் மட்டும்தான் தெரிந்திருந்தன என்பதை நினைவில் வைத்துக்கொள்ளுங்கள். இப்போதைய தசம (decimal) குறியீட்டு முறை அப்போது இருந்திருக்கவில்லை. எனவே π-ஐ இரண்டு எண்களின் விகிதமாகச் சொல்லவேண்டும்.

π-க்கு மிக நெருங்கிய முழு எண் 3. பாபிலோனியர்கள், $\frac{25}{8}$ என்பதையும், எகிப்தியர்கள், $\frac{256}{81}$ என்பதையும், வேதகால இந்தியர்கள், $\frac{339}{108}$ என்பதையும் பயன்படுத்தினர்.

இன்று பள்ளிப்புத்தகங்களில் நாம் பார்க்கும் $\frac{22}{7}$ என்பதை கிரேக்கர் ஆர்க்கிமெடிஸ் கொடுத்தார். இவர்தான் குளித்துக்கொண்டிருக்கும்போது யுரேகா என்று கத்திக்கொண்டு அம்மணமாகத் தெருவில் ஓடியதாக ஒரு கதை உண்டு! ஒரு குறிப்பிட்ட எடையுள்ள பொருள் ஒன்றை தண்ணீரில் அமிழ்த்தினால், அந்தப் பொருள், தன் எடையளவுக்கு தண்ணீரை வெளியேற்றும் என்பதைத்தான் அவர் தன்னுடைய பாத் டப்பில் அமிழும்போது கண்டுபிடித்தார்!

ஆர்க்கிமெடிஸ் கொடுத்த $\pi = \frac{22}{7}$ என்பதுதான் முழு உண்மை என்று வாழ்நாள் முழுவதும் நினைத்திருப்பவர்கள். பலகோடி. உண்மையில், $\frac{22}{7}$ என்பது π-ஐவிட சற்றே பெரியது. சீனர்கள் $\frac{355}{113}$ என்ற விகிதத்தைப் பயன்படுத்தினர். இது π-க்கு வெகு அருகில் இருக்கக்கூடியது.

ஆனால் இவை எல்லாமே தோராயமான மதிப்புகளே. ஏன் என்பதை நீங்கள் எளிதாக இந்நேரம் கண்டுபிடித்திருப்பீர்கள். ஏனெனில் π ஒரு விகிதமுறா எண். இதற்கான நிரூபணத்தை பின்னர் நேரம் வரும்போது பார்ப்போம். அதற்குத் தேவையான கணிப்பியல் (Calculus) அல்லது கோணவியல் (Trignometry) பற்றி நாம் இன்னமும் பார்க்கத் தொடங்கவில்லை.

π முதலில் வரைகணிதம் தொடர்பாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. ஆனாலும் இன்று எந்தத் துறை சார்ந்த கணிதப் புத்தகத்தை எடுத்தாலும், π-ஐப் பார்க்காமல் இருக்கமுடியாது.

ஸ்ரீனிவாச ராமானுஜனுக்கு π மீது தீராக் காதல் இருந்தது. தன்னுடைய நோட்டுப்புத்தகத்தில் π-ஐக் கணக்கிட பல முடிவில்லா தொடர்களை (Infinite series) அவர் எழுதிவைத்திருந்தார். மேலோட்டமாகப் பார்க்கும்போது, எங்கிருந்து இந்தத் தொடர்கள் வந்தன என்று யாருக்கும் புரியாது. உதாரணத்துக்கு இந்தச் சமன்பாட்டைப் பாருங்கள்:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k)!^4 (396)^{4k}}$$

இது ஒரு முடிவற்ற தொடர் (இதுபோன்ற தொடர்களைப் பின்னர் பார்க்கப் போகிறோம்). அதாவது எல்லையில்லாத, முடிவே இல்லாத பல எண்களின் கூட்டுத்தொகை இது. மேலே உள்ள சமன்பாட்டில்,

ஃபேக்டோரியல் என்று சொல்லப்படும் $k!$ ஒன்று உள்ளது. இங்கே k ஒரு நேர் முழு எண் (Positive integer). கீழே உள்ளவற்றில் . என்பது பெருக்கலைக் குறிக்கும்.

$3! = 3.2.1 = 6$

$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$

$k! = k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(3)(2)(1)$

மேலும், $0! = 1$. எந்த எண்ணின் படியும் 0-வாக இருந்தால், அதன் விடை 1. அதாவது, $5^0 = 1$. $x^0 = 1$, x எதுவாக இருந்தாலும். இவற்றை வைத்துக்கொண்டு, கூட்டல் குறியீடு $\sum$-ன்கீழ் இருக்கும் முதல் எண் 1103 ஆக வரும். இரண்டாம் எண் $\frac{4!(1103+26390)}{396^4} = \frac{659832}{24591257856}$. ஒரு ஜாலிக்காக மூன்றாம் எண்ணைக் கண்டுபிடித்தால் வருவது, $\frac{2172562560}{604729962940281716736}$. இதற்கும் அடுத்த எண்ணை கால்குலேட்டர் கொண்டு கண்டுபிடிக்க நினைத்தால், உங்களுக்கு என் ஆசீர்வாதங்கள்! இனி வரும் எண்கள் எல்லாமே சுழியத்துக்கு மிக அருகில் செல்வதால், அவற்றை வெட்டிவிடலாம். இப்போது π-ன் மதிப்பு என்ன என்று பார்க்கலாமா?

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(1103 + \frac{659832}{24591257856} + \frac{2172562560}{604729962940281716736}\right)$$

அடுத்த பதிவில், ராமானுஜன் π-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடக் கண்டுபிடித்த சமன்பாடுகள் சிலவற்றைப்பார்ப்போம்.

தொடர் வரிசைகள்

π என்னும் எண்ணுக்கும் அதைப்போன்ற பிற சிறப்பு எண்களுக்கும் பிறகு வருவோம். ராமானுஜன் π-ஐக் கணிக்கக் கொடுத்த பல ஃபார்முலாக்களையும் பிறகு பார்ப்போம். இவற்றைப் புரிந்துகொள்ள நமக்கு வேறுசில அடிப்படை விஷயங்கள் தேவைப்படுகின்றன. அவற்றை இப்போது பார்ப்போம். இவை தொடர் வரிசைகள், தொடர் பின்னங்கள், தொடர் மூலங்கள் ஆகியவை. இவற்றை மீண்டும் மீண்டும் நாம் பார்க்க இருப்பதால், இங்கே கொஞ்சம் கவனமாகப் பார்த்துவிடுவோம்.

அதற்குமுன், 'முடிவிலி' என்ற கருத்தைப் பார்க்கவேண்டும். இதை ஆங்கிலத்தில் இன்ஃபினிட்டி என்று அழைக்கிறோம்; ∞ என்ற குறியீட்டால் எழுதுகிறோம். நமக்கு சுழியம் என்றால் என்ன என்று புரிகிறது. ஒன்றுமே இல்லாததைக் குறிப்பது சுழியம். 1, 2 என்றாலும் என்ன என்று புரிகிறது. முடிவிலி என்றால் என்ன?

முடிவிலி என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் குறிப்பதல்ல. அது ஒரு கருத்து. எங்கோ தொலைவில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி என்று வைத்துக்கொள்ளுங்கள். நெருங்கவே முடியாத, எண்ணவே முடியாத ஒரு நிலை. பிரம்மகுப்தர், சுழியத்தை எவ்வாறு கணக்கில் பயன்படுத்துவது என்று சில விதிகளைக் கொடுத்திருந்தார் என்று ஏற்கெனவே பார்த்திருந்தோம் அல்லவா? அவையாவன:

$x + 0 = x$

$x - 0 = x$

$x.0 = 0$

$0 - x = x$

ஆனால் பிரம்மகுப்தர் ஒரு தவறைச் செய்திருந்தார்: $\frac{0}{0} = 1$ என்று எழுதியிருந்தார். ஆனால் இது சரியானதல்ல. இப்பொழுது நாம் முடிவிலியை இவ்வாறு வரையறுக்கலாம்:

$\frac{1}{0} = \infty$

$\infty + x = \infty$, x முடிவுள்ளது.

$\infty - x = \infty$, x முடிவுள்ளது.

$\infty . x = \infty$, x முடிவுள்ளது.

$\frac{x}{\infty} = 0$, x முடிவுள்ளது.

ஆனால், $(0.\infty)$, or $(\frac{\infty}{\infty})$ அல்லது $(\frac{0}{0})$ ஆகியவற்றுக்கு மதிப்பை வரையறுக்க முடியாது.

ஓர் எண், அது எத்தனை பெரியதாக இருந்தாலும் சரி, அதனை எழுதமுடியும் என்றால் அது முடிவிலியல்ல. முடிவுள்ளது, திட்டமானது. 10^{100} என்பது மிகப்பெரிய எண். 1 எழுதி அதற்குப் பக்கத்தில் 100 சுழியங்களை எழுதினால் கிடைக்கும் எண்! ஆனால் இது முடிவுள்ள எண். முடிவிலி என்பது இதைவிடப் பெரியது. $10^{10^{100}}$ என்ற எண், மேலும் பெரியது. ஆனால் இந்த எண் கூட ஒரு

முடிவுள்ள எண்ணே. இந்தப் பிரபஞ்சத்தில் உள்ள அத்தனை அணுக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு முடிவுள்ள எண். ஒரு தண்ணீர்த் துளி என்பது 3 மில்லி லிட்டர் அடங்கிய தண்ணீர் என்று வைத்துக்கொள்ளுங்கள். அப்படியென்றால், உலகில் உள்ள அத்தனை கடல்களிலும் சேர்த்து இருக்கும் தண்ணீர்த் துளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது. மண்ணில் இருக்கும் துகள்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது. பிரபஞ்சத்தில் இருக்கும் நட்சத்திரங்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது. உலகில் வசிக்கும் மனிதர்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது. உலகின் சகல ஜீவராசிகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது.

முடிவிலி என்பதைக் கண்ணால் காணும்படியான உதாரணம் ஏதும் கிடையாது. இது ஒரு கணிதக் கருத்துரு மட்டுமே. இந்தப் பிரபஞ்சத்தில் உள்ள அனைத்து விஷயங்களுமே முடிவுள்ளவைதாம். ஆனால் கணிதத்தில் நீங்கள் நிறைய முடிவிலிகளைப் பார்க்கலாம்.

முடிவிலாத் தொடர்கள்

இப்போது முடிவிலி என்பதை ஓரளவுக்குப் புரிந்துகொண்டுள்ளோம், அல்லவா? இதை வைத்துக்கொண்டு, கணிதத்தில் பல இடங்களில் காணப்படும் ஒன்றைப் பார்ப்போம். தொடர்ச்சியாகப் பல எண்களை ஒன்றாகக் கூட்டுவதற்கு கூட்டுத் தொடர் (Addition series) என்று பெயர். முடிவே இல்லாத பல எண்களைக் கூட்டிக்கொண்டே இருந்தால் கிடைப்பது முடிவிலாத் தொடர்கள் (Infinite series). 1+2+3+4 என்பதை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். இதன் விடை 10. சில எண்களைக் கூட்டினால் வரும் தொகை இது. இதுபோல அடுத்தடுத்து உள்ள பல எண்களைக் கூட்ட ஒரு எளிதான சமன்பாடு உள்ளது. 1+2+3+4+5+.... +100 வரை கூட்டவேண்டும் என்று வைத்துக்கொள்ளுங்கள். இதன் விடை என்ன? உங்களிடம் நிறைய நேரம் இருந்தால் ஒவ்வொன்றாகக் கூட்டிக்கொண்டே வரலாம்.

கவுஸ் என்ற ஜெர்மானிய கணித மேதை சிறுவனாகப் பள்ளியில் படித்தபோது, அவருக்கு வாய்த்த வாத்தியார் கொஞ்சம் முசுடு. சிறு பசங்களை பயமுறுத்துவது அவருக்கு விளையாட்டு. அடுத்தடுத்து உள்ள பல எண்களைக் கொடுத்து, கூட்டச் சொல்லுவார். பையன்கள் அடுத்த சில மணிநேரம் மூச்சுவிடாமல் கூட்டிக்கொண்டே இருப்பார்கள். அப்படித்தான் அவர் கவுஸ் இருந்த வகுப்பில் செய்தார். ஆனால் அவர் இந்தப் பக்கம் திரும்பிய நேரத்துக்குள் கவுஸ் விடையைச் சொல்லிவிட்டார்.

நீங்கள் செய்யவேண்டியது இவ்வளவுதான்! கூட்டலுக்குள் இருக்கும் எண்களை தலைகீழ் வரிசையாக மாற்றி எழுதுங்கள்.

1+2+3+4+5+...+100 = 100+99+98+....+1

இரண்டு தொடர்களையும் ஒன்றின்கீழ் ஒன்றாக எழுதுங்கள்.

1+2+3+ .... + 98+99+100

100+99+98+...+3+2+1

இரண்டு வரிசைகளையும் கூட்டுங்கள். அதாவது முதல் வரிசையின் முதல் எண்ணையும் இரண்டாவது வரிசையின் முதல் எண்ணையும் கூட்டுங்கள். அப்படியே தொடர்ந்து செல்லுங்கள்.

101+101+101+....+101+101+101 = 100*101

இப்போது கொடுத்துள்ள தொடரை இரண்டுமுறை கூட்டியுள்ளீர்கள். எனவே வரும் விடையை

இரண்டால் வகுக்கவேண்டும்.

அதாவது, 1+2+3+4+5+...+100 = $\frac{100*101}{2}$

அவ்வளவுதான். இதையே n உறுப்புகள் கொண்ட தொடருக்குப் பொதுமைப்படுத்தலாம்.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

இந்தச் சமன்பாடு எல்லா n-களுக்கும் பொருந்தும் என்பதை உய்த்தறிதல் (induction) முறைப்படி நிரூபிக்கலாம். உய்த்தறிதல் முறையில், ஒரு சமன்பாடு n, $n + 1$, 1 ஆகிய மூன்றுக்கும் சரியாக உள்ளது என்றால் போதும். பிற எண்கள் அனைத்துக்கும் அந்தச் சமன்பாடு சரியானதாக இருக்கும். இதற்கான நிரூபணத்தை இங்கே நாம் பார்க்கப்போவதில்லை.

எனவே, 1+2+3+4+5+...+100 = 50*101 = 5050

1+2+3+4+5+...+1000 = 500*1001 = 500500

மேலே நாம் பார்த்தது முடிவுள்ள தொடர்கள். இவற்றில் முடிவுள்ள சில உறுப்புகளே உள்ளன. 100 அல்லது 1000 உறுப்புகள். வேண்டுமென்றால், 10^{100} உறுப்புகள் கூட இருக்கலாம்! ஆனாலும் முடிவுள்ளதே. அவற்றைக் கூட்டி வரும் விடையும் முடிவுள்ள எண்ணே. அடுத்து, ஒரு தொடரைப் பாருங்கள். இங்கே அடுத்தடுத்து உறுப்புகள் வந்துகொண்டேயிருக்கும். முடிவே இல்லாமல். அதாவது,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \infty$

இங்கே, இதற்கான விடை ∞ என்று எளிதாகச் சொல்லிவிடமுடியும். இந்தத் தொடர், முடிவில்லாத் தொடருக்கு ஓர் உதாரணம். இந்தத் தொடரைப் பாருங்கள்:

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + \infty$

அதாவது அடுத்தடுத்த எண்கள் நேராகவும் எதிராகவும் உள்ளன. இந்தத் தொடருக்கான விடை $-\infty$ என்று எளிதாகச் சொல்லிவிடலாம். (எப்படி என்று கண்டுபிடியுங்கள்!)

எல்லா முடிவில்லாத் தொடர்களின் கூடுதலும் ∞ அல்லது $-\infty$ என்றே இருக்குமா? அப்படியென்றால் போரடிக்கும் அல்லவா? ஆனால் அது உண்மையில்லை. பல முடிவற்ற தொடர்களின் கூட்டு எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாக இருக்கும். எப்படிப்பட்ட நிலையில் இது ஏற்படும் என்று எளிதாக நம்மால் யோசித்துவிட முடிகிறது. அடுத்தடுத்து நாம் கூட்டும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் சுழியத்தை நோக்கிச் செல்லவேண்டும். இல்லாவிட்டால் நமது கூட்டுத்தொகை முடிவிலியாகவே இருக்கும். ஆனால் இந்தக் கட்டுப்பாடு மட்டும் போதாது. உதாரணத்துக்கு இந்தத் தொடரை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

இது போன்ற தொடர்களை நாம் கணிதக் குறியீட்டு முறையில் இவ்வாறு எழுதுகிறோம்:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

இங்கே, n-வது உறுப்பு என்பது $\frac{1}{n}$. இது சுழியத்தை நோக்கிச் செல்கிறது என்பது தெளிவாகத்

தெரிகிறது. ஆனால் இந்தத் தொடர் ஒரு முடிவுள்ள எண்ணை நோக்கிக் குவிவதில்லை. மிக மெதுவாக முடிவிலியை நோக்கிச் செல்கிறது. ஒரு முடிவில்லாத் தொடர் குவிகிறதா அல்லது விரிகிறதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்க சில விதிகள் உள்ளன.

விரியும் தொடர்கள் (divergent series) என்றாலே அவை மோசமானவை என்று நினைக்கவேண்டாம். ஆனால் அவற்றைக் கையாளும்போது கவனமாக இருக்கவேண்டும். ஸ்ரீனிவாச ராமானுஜன், கீழ்க்கண்ட தொடருக்கான விடையை இவ்வாறு எழுதியிருந்தார்:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}$$

மேலோட்டமாகப் பார்க்கும்போதே இது சரியாக இருக்கமுடியாது என்று நமக்குத் தெரிகிறதல்லவா? ஆனால் ராமானுஜன் தைரியமாக இந்தச் சமன்பாட்டை இங்கிலாந்தில் இருக்கும் பல கணிதப் பேராசிரியர்களுக்கு அனுப்பிவைத்தார். அவர்கள் ராமானுஜனைப் பைத்தியம் என்று முடிவுகட்டினர். ஆனால் கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக் கழகக் கணித வல்லுனர் ஹார்டியால், ராமானுஜன் என்ன சொல்லவருகிறார் என்பதைப் புரிந்துகொள்ள முடிந்தது. (நான் இந்தச் சமன்பாடு சரியா, தவறா என்று இப்போது சொல்லப்போவதில்லை. இதே கதையை பகா எண்கள் (Prime numbers), ரீமான் கருதுகோள் (Riemann Hypothesis) ஆகியவற்றைப் பற்றிப் பார்க்கும்போது மீண்டும் கவனிப்போம்.)

இப்போது மீண்டும் முடிவிலாத் தொடர்களுக்கு வருவோம். இந்தத் தொடர்கள் குவியவேண்டும் என்றால், தொடரின் n-வது உறுப்பு சுழியத்தை நோக்கிச் செல்லவேண்டும் என்று சொல்லியிருந்தோம். அது போதாது. அத்துடன், $(n + 1)$-வது உறுப்புக்கும் n-வது உறுப்புக்குமான விகிதம், n ∞-ஐ நோக்கிச் செல்லும்போது, 1-ஐ விடக் குறைவாக இருக்கவேண்டும். அப்போதுதான் அந்தத் தொடர் குவியும். விகிதம் 1-ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் தொடர் விரியும். ஆனால் இந்த விகிதம் 1 என்று இருந்தால், தொடர் குவியலாம், குவியாமலும் இருக்கலாம். மேலும் சில விதிகளை வைத்து இந்தத் தொடரைப் பரிசீலிக்கவேண்டும். நாம் அவற்றை முற்றிலுமாக இங்கே பார்க்கப்போவதில்லை.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்ற தொடர் விரியக்கூடியது. ஆனால், $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ என்ற தொடர் குவியக்கூடியது.

இந்தத் தொடரின் அனைத்து உறுப்புகளையும் சேர்த்துக் கூட்டினால் வரும் விடை இப்படித்தான் இருக்கும் என்று சொல்லலாம்: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$

இப்படிப்பட்ட ஒரு முடிவிலாத் தொடர்தான் நாம் பின்னால் பார்க்க இருக்கும் மற்றொரு சிறப்பு எண்ணைத் தரப்போகிறது. அதற்கு நாம் இன்னமும் சிறிது நாள்கள் காத்திருக்கவேண்டும். நாளை தொடர் பின்னங்களையும் தொடர் மூலங்களையும் பற்றிப் பார்ப்போம்.

தொடர் பின்னங்கள்

நாம் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவிலான விகிதமுறு எண்களைப் பார்த்துள்ளோம். இங்கே p, q இரண்டுமே முழு எண்கள் ஆகும். இப்பொழுது $\frac{p}{q+\frac{1}{r}}$, என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். இங்கே p, q, r அனைத்துமே முழு எண்கள். இதையுமே $\frac{pr}{qr+1}$ என்று மாற்றி எழுதமுடியும். இதுவும் விகிதமுறு பின்னமே. அப்படியானால், கீழ்க்கண்ட எண்ணைப் பற்றி என்ன நினைக்கிறீர்கள்?

$$a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}$$

பொதுவாக, இந்தத் தொடர் பின்னங்கள் முடிவுள்ளவையாக இருந்தால் அவற்றை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றி எழுதமுடியும். மேலே கொடுத்துள்ள எண்ணை இப்படி எழுதலாம்:

$$\frac{a_0a_1a_2a_3+a_0a_1+a_0a_3+a_2a_3+1}{a_1+a_3+a_1a_2a_3}$$

ஆனால் இந்தத் தொடர் பின்னங்கள் முடிவே இல்லாமல் சென்றால் என்ன செய்வது? ஓர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

இந்தத் தொடர் பின்னம் முடிவே இல்லாமல் செல்வதால், இதனைக் கீழ்க்கண்ட குறியீட்டிலும் எழுதலாம்:

$$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\dots$$

இதற்கு என்ன விடை என்று கண்டுபிடிக்க முடியுமா? முடியும். இந்தத் தொடரின் விடையை x என்று வைத்துக்கொள்ளுங்கள். அப்படியென்றால், இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x=1+\frac{1}{x}$$

இதனை, இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$x^2-x-1=0$$

இது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. இதற்கான பதிலை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்பதை ஏற்கெனவே பார்த்துள்ளோம். அந்த முறையில் விடையைக் கண்டுபிடித்தால், நமக்குக் கிடைப்பது:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

இங்கே நம்முடைய தொடர் பின்னத்தில் எல்லாமே நேர் முழு எண்ணாக இருப்பதால், விடையும் நேர் எண்ணாகவே இருக்கவேண்டும், எதிர் எண்ணாக இருக்கமுடியாது. எனவே, எதிர் எண்ணை

விலக்கிவிட்டு எழுதினால் நமக்குக் கிடைப்பது:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

இந்தத் தொடர் பின்னத்துக்குக் கிடைத்துள்ள விடை ஒரு விகிதமுறா எண்.

இதைப்போன்றே தொடர் வர்க்கமூலத்திலும் இப்படி ஆகும். உதாரணத்துக்கு, கீழ்க்கண்ட தொடர் வர்க்கமூலத்தை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$$

தொடர் பின்னத்துக்கு விடை கண்டுபிடித்தது போன்றே, மேலே உள்ள தொடர் வர்க்கமூலத்துக்கும் விடை கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$x = \sqrt{1+x}$$

இரண்டு பக்கத்தையும் வர்க்கம் செய்யும்போது,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் நேர் விடையை எடுத்துக்கொண்டால், நமக்குக் கிடைப்பது:

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ஒரு தொடர் பின்னத்துக்கும், ஒரு தொடர் வர்க்கமூலத்துக்கும் ஒரே மதிப்பு இருப்பது ஆச்சரியமாக இருக்கிறதல்லவா? அதைவிட ஆச்சரியமானது இந்த விடை.

ஹிந்து-அராபிக் எண்களை ஐரோப்பாவுக்கு எடுத்துக்கொண்டு போனவர் என்று ஃபிபனாச்சி என்ற இத்தாலியரின் பெயரைப் பார்த்தோம் அல்லவா? அவர் பெயரால் ஒரு தொடர் வழங்கப்படுகிறது. முயல்கள் குட்டி போடுவதை வைத்து அவர் இந்தத் தொடரை உருவாக்கினார் என்று கதை சொல்வார்கள். ஒரு ஜதை முயல்கள் பிறந்து ஒரு மாதம் கழித்தே முதிர்ச்சி அடைந்து குட்டிபோடும் நிலையை அடையுமாம். அதன்பின் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு ஜதை குட்டிகளை ஈனும் என்று ஃபிபனாச்சி எடுத்துக்கொண்டார். ஒரு ஜதை குட்டி முயல்களுடன் முதல் மாதம் ஆரம்பித்தவரிடம் அடுத்தடுத்த மாதங்களில் எவ்வளவு குட்டிகள் இருக்கும்?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

அதாவது, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

இந்தத் தொடர் எண்களுக்குத்தான் ஃபிபனாச்சி தொடர் என்று பெயர். இந்தத் தொடரின் அடுத்த எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க, அதற்கு முந்தைய இரு எண்களைக் கூட்டவேண்டும். இப்பொழுது, $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ என்ற விகிதத்தை எடுத்துக்கொண்டால், n என்பது ∞ நோக்கிப் போகும்போது, இந்த விகிதம் 'தங்க விகிதம்' (golden ratio) என்ற எண்ணை நோக்கிப் போகும். இந்தத் தங்க விகிதம் என்ன என்பதைக் கணிக்கலாம். n என்பது ∞-ஐ நோக்கிப் போகும்போது, இந்த விகிதம் குவிகிறது. இதனை, x என்று எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.

அப்படியென்றால், $x = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x}$

இது நாம் ஏற்கெனவே பார்த்துவரும் அதே இருபடிச் சமன்பாடுதான்!

$x^2 - x - 1 = 0$

இதற்கான விடை, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

இந்தத் தங்க விகிதத்தில் அப்படி என்ன மந்திர ஜாலம் இருக்கிறது? ஐரோப்பிய மறுமலர்ச்சி காலத்தில் ஓவியர்களும் சிற்பிகளும் இந்த விகிதத்தைப் பயன்படுத்தி ஓவியங்களை வரைந்தனர், சிற்பங்களை வடித்தனர். லியானார்டோ டா விஞ்சியின் உலகப் புகழ்பெற்ற மோனா லிசா ஓவியத்தின் முகத்தை அடைக்கும் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் இந்த விகிதத்தில்தான் உள்ளன. டா விஞ்சியின் மற்றுமொரு ஓவியம் Vitruvian man என்பதில் ஒரு மனிதன் தனது கையை அகல விரித்து, கால்களையும் விரித்து நிற்பதாக இருக்கும். அங்கும் தங்க விகிதம் எங்கு பார்த்தாலும் இருக்கும்.

தொடர் பின்னங்களுக்கும், தொடர் வர்க்கமூலங்களுக்கும், இருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும் விடைகளுக்கும் மிக நெருங்கிய தொடர்பு உள்ளது.

ஆனால் எல்லா தொடர் வர்க்கமூலங்களுக்கும் ஒரு விகிதமுறா எண்தான் விடையாக இருக்குமா? கீழே உள்ள தொடர் வர்க்கமூலத்தை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்:

$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4...}}}$

இந்தக் கணக்கை ஸ்ரீநிவாச ராமானுஜன் ஜர்னல் ஆஃப் இந்தியன் மேத்தமேட்டிகல் சொசைட்டி என்ற இதழில் கேட்டிருந்தார். ராமானுஜன் கேம்பிரிட்ஜுக்குப் போவதற்கு முந்தைய காலம் இது. சில மாதங்களுக்கு யாரிடமிருந்தும் பதில் வரவில்லை. கடைசியில் ராமானுஜனே இதற்கான விடையைக் கொடுத்தார். விடை என்னவோ மிக எளிதானதுதான். 3 என்பதுதான் அது. இந்த விடையை எப்படிக் கண்டுபிடிப்பது?

$f(x) = x + 1$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.

அப்படியென்றால், $(f(x))^2 = (x+1)^2 = 1 + x(x + 1 + 1)$

அல்லது, இதனை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$f(x) = \sqrt{1 + xf(x+1)}$

இதையே தொடர்ந்து ரிகர்சிவாக எழுதிக்கொண்டேபோனால் கிடைப்பது:

$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)f(x+2)}} = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + \left(x+1\right)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + (x+3)...}}}}$

இப்போது, $x = 2$ என்று எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.

இப்போது நமக்குக் கிடைப்பது:

$f(2) = 2 + 1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4...}}} = 3$

அவ்வளவுதான்! சரி, இப்போது கீழ்க்கண்ட தொடர் வர்க்கமூலம் ஒரு விடையை நோக்கிக் குவிகிறதா, அப்படியென்றால் அது என்ன விடை என்று கண்டுபிடியுங்கள் பார்க்கலாம்:

$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + ...}}}}$

சரி, இப்போது விட்ட π-க்கு மீண்டும் வருவோம். இதை தொடர் பின்னமாக எழுதமுடியும்:

$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{14+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}$

இதை, பல தொடர் வரிசைகளாகவும் எழுதமுடியும். அவற்றைத்தான் அடுத்து பார்க்க இருக்கிறோம்.

இந்தியத் தொலைக்காட்சிகளில் முதன்முறையாக, கூட்டுச் சராசரியும் பெருக்குச் சராசரியும்

சமீபத்தில் தொலைக்காட்சி சானல்களில் ஒரு 'career guidance' நிறுவனத்தின் விளம்பரத்தைப் பார்த்தேன். ஓர் இளம் ஜோடி, எங்கேயோ கேம்பிங் போயிருக்கிறார்கள். இரவு கூடாரத்துக்குள் அருகருகே படுத்துக்கொண்டிருக்கிறார்கள். திடிரென இளைஞனுக்கு மொபைல் போனில் அழைப்பு வருகிறது. அவன் மெதுவாக எழுந்திருந்து வெளியே வந்து போனில் பேசுகிறான். பின்னாலேயே அந்த இளம்பெண் எழுந்துவந்து என்ன பேசுகிறான் என்பதைக் கவனிக்கிறாள். அவன் சொல்கிறான்: 'See, it is a trick question. The arithmetic mean is always greater than the geometric mean'. (கூட்டுச் சராசரி என்பது எப்போதும் பெருக்குச் சராசரியைவிட அதிகம்.) இளம்பெண் நிம்மதி அடைகிறார். அந்த நிறுவனத்தின் கவுன்செலர்கள் எப்போதும் தங்களது மாணவர்களின் வாழ்க்கையையே மனத்தில் வைத்துள்ளனர் என்று அந்த விளம்பரம் முடிகிறது.

ஒரு தொலைக்காட்சி விளம்பரத்தில் இந்தச் செய்தியைக் கேட்டு எனக்கு ஒரே சந்தோஷம். உண்மையில் சிறு தவறு அங்கே நிகழ்ந்துள்ளது. கூட்டுச் சராசரி என்பது, பெருக்குச் சராசரியை விட அதிகமாக அல்லது சமமாக இருக்கும் என்பதுதான் சரியான கூற்று.

இந்தச் சராசரிகள் என்ன என்பதையும் இவற்றுக்கு இடையே என்ன உறவு என்பதையும் பார்ப்போம்.

இரு எண்கள் a மற்றும் b ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean = AM) என்பது $\frac{a+b}{2}$ ஆகும். அவற்றின் பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean = GM) என்பது $\sqrt{ab}$ ஆகும். பெருக்குச் சராசரி அர்த்தமுள்ளதாக இருக்கவேண்டும் என்றால், a மற்றும் b இரண்டுமே நேர்மறை எண்களாக, அல்லது எதிர்மறை எண்களாக இருக்கவேண்டும்.

இப்போது, AM என்பது GM-ஐ விட அதிகம் என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியென்றால்,

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

அல்லது, $a + b > 2\sqrt{ab}$

இரண்டு பக்கத்தையும் வர்க்கமாக்கினால்,

$a^2 + b^2 + 2ab > 4ab$

அல்லது, $a^2 + b^2 - 2ab > 0$

அல்லது, $(a - b)^2 > 0$

இது கிட்டத்தட்ட உண்மை. பார்க்கப்போனால், $(a - b)^2$ >= 0 ஆகும். ஏனெனில் எந்த எண்ணையும் வர்க்கம் செய்தால் கிடைப்பது ஒரு நேர்மறை எண்ணாகும். ஆனால் $a = b$ என்றானால், அது சுழியமாக இருக்கும். அப்படியென்றால் AM, GM இரண்டுமே ஒன்றாக இருக்கும்.

எனவே, இரு எண்களை எடுத்துக்கொண்டால், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி என்பது அவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைவிட அதிகமாக அல்லது அதற்குச் சமமாக இருக்கும் என்பதை நாம் நிரூபித்துவிட்டோம்.

இதே கூற்றை, பல எண்களுக்குச் சரியாக இருக்குமா என்று நிரூபிக்க முடியுமா? அதாவது, பொதுமையாக,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} >= \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டை எப்படி நிரூபிப்பது என்று யோசியுங்கள்!

கால்குலஸ், ஒரு குட்டி அறிமுகம்

சிறப்பு எண்களைப் பற்றி எழுதும்போது அடுத்ததாக e என்பதைப் பற்றி எழுத விரும்பினேன். ஆனால் கால்குலஸைத் தொடாமல் அதைச் செய்யமுடியாது என்பதால், இப்போது கொஞ்சம் கால்குலஸ் பற்றிப் பேச முடிவுசெய்துள்ளேன்.

பள்ளிக்கூடப் புத்தகங்களில் கால்குலஸைப் படு மோசமாக சொல்லிக்கொடுக்கிறார்கள். கறாரான தர்க்கத்துடனும் சொல்லித் தருவதில்லை. எனது 11-ம் வகுப்பு பாடங்களை நினைத்துப் பார்க்கிறேன். எடுத்த எடுப்பில், $\frac{df}{dx}$ என்று ஆரம்பித்து விடுவார்கள். Function f (சார்பு), continuity (தொடர்ச்சி) ஆகியவை பற்றிய முழுமையான புரிதல் மாணவர்களிடம் உள்ளது என்று நினைத்துக்கொண்டனர். ஆனால் இன்றைய 11-ம் வகுப்பு தமிழ்நாடு பாடத்திட்டம் தேவலாம். சார்புகளில் ஆரம்பித்து, எல்லை (limit), தொடர்ச்சி (continuity), வகையீடு (differentiation) ஆகியவற்றைப் பற்றி ஓரளவுக்கு விளக்கியுள்ளனர். மிகவும் சுவாரசியமாக எழுதப்பட்டுள்ளது என்று சொல்லமாட்டேன். ஆனால் தேவலாம்.

பல நூற்றாண்டுகளாக, தத்துவவாதிகளும் விஞ்ஞானிகளும் பருண்மை உலகத்தை ‘தொடர்ச்சியான' ஒன்றாகக் கருதிவந்துள்ளனர். அதே நேரம் கிரேக்கர்கள் காலத்திலிருந்தே அணு என்று மிகச்சிறிய ஒரு துண்டைப் பற்றிய கருத்தாக்கமும் இருந்துவந்துள்ளது. 19-ம் நூற்றாண்டின் கடைசியில்தான் அணு பற்றிய கருத்தாக்கம் சரியான முறையில் உருவாக ஆரம்பித்தது. தொடர்ந்து 20-ம் நூற்றாண்டின் ஆரம்பத்தில் பருண்மைப் பொருள்கள் அன்றி, ஆற்றல்கூட தொடர்ச்சியான ஒன்றல்ல, குவாண்டம் துண்டுகளால் ஆனதுதான் என்பது விளங்கியது. உலகம் தொடர்ச்சியான பரவல் அல்ல என்றாலும்கூட, பல பண்புகள் தொடர்ச்சியானவையே. காந்தப் புலம், ஈர்ப்பு விசைப் புலம் போன்றவை உதாரணங்கள்.

பருண்மை உலகம் எப்படியிருந்தாலும்கூட, சார்புகள், தொடர்ச்சி ஆகியவற்றை வெறும் கருத்தாக்கங்களாகவே எடுத்துக்கொண்டே நாம் நடந்துகொள்ளலாம்.

ஒரு சார்பு, தொடர்ச்சியானதாக இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. ஆனால் தொடர்ச்சியானதாக இருந்தால்தான் கால்குலஸ் எனப்படும் நுண்கணிதம் செயல்படமுடியும். முதலில் சார்பு என்றால் என்ன என்பதைக் கவனமாகப் பார்ப்போம்.

இரண்டு கணங்களில் (set) உள்ள உறுப்புகளுக்கு இடையேயான உறவை நிர்ணயிப்பதுதான் சார்பு. கணம் என்றால் என்ன என்று அதற்குள் அதிகமாக இப்பொது நுழையவேண்டாம். கணம் என்றால் பல உறுப்புகள் ஒன்றுசேர்ந்த ஒரு கூட்டமைப்பு என்று மட்டும் வைத்துக்கொள்வோம். நான்கைந்து எண்களைப் பிடித்து ஒரு டப்பாவுக்குள் அடைத்துவைத்தால் கிடைப்பது ஒரு கணம். ஒரு கணத்துக்குள் குறிப்பிட்ட அளவுக்கான உறுப்புகள்தான் இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. கணக்கற்ற, முடிவற்ற எண்கள்கூட இருக்கலாம்.

1, 2, 3 ... என்று செல்லும் அத்தனை நேர்மறை முழு எண்களையும் எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். இவற்றை ஒன்றுசேர்த்தால், இது ஒரு கணம். அத்தனை எதிர்மறை முழு எண்களையும் -1, -2, -3 ... எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். அதுவும் ஒரு கணம்தான். இந்த இரண்டு கணங்களையும் எடுத்துக்கொண்டு இவற்றுக்கிடையே ஓர் உறவை ஏற்படுத்துங்கள். அப்படிப்பட்ட உறவுதான் ‘சார்பு' எனப்படும். அதாவது ஒரு கணத்தின் உறுப்புகள், மற்றொரு கணத்தின் உறுப்புகளைச் சார்ந்து உள்ளன. அந்தச் சார்பை விளக்கும் உறவுமுறை - ‘சார்பு' எனப்படுகிறது.

நேர்மறை முழு எண்களின் கணம் A என்றும், அதில் ஓர் உறுப்பு a என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். அதேபோல எதிர்மறை முழு எண்கள் அடங்கிய கணம் B என்றும், அதில் உள்ள ஓர் உறுப்பு b என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். A-ல் இருந்து எந்த உறுப்பையும் எடுத்து அதனை -1-ஆல் பெருக்கினால் B-ன் உறுப்பு கிடைத்துவிடும். எனவே இங்கே "-1-ஆல் பெருக்குதல்" என்பதுதான் உறவு. அதை விளக்குவதுதான் சார்பு. இதனை, $f(x) = -x$ என்று எழுதமுடியும்.

மேலே காட்டிய உதாரணத்தில் அனைத்து உறுப்புகளும் தனித்தனியானவையாக உள்ளன. மாற்றாக, நீங்கள் இயல் எண்கள் அடங்கிய கணமான R என்பதை எடுத்துக்கொள்ளலாம். இந்த கணத்தின்மீது மேலே காட்டிய சார்பைப் பயன்படுத்தினால் கிடைக்கும் உறுப்புகளும் அதே R என்னும் கணத்தின் உறுப்புகளே.

இந்த R என்னும் கணத்தின் உறுப்புகள் எல்லாம் மிக நெருக்கமாக, இடைவெளியே இல்லாமல் பரவியுள்ளன. இந்த கணத்தின் ஏதோ இரு உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டால், அவை இரண்டுக்கும் இடையே உள்ள ஓர் எண்ணும்கூட இந்த கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கும். a மற்றும் b என்னும் இரண்டு இயல் எண்களை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். $c = \frac{a+b}{2}$ என்ற எண்கூட இயல் எண்தான். இந்த எண் a மற்றும் b ஆகியவற்றுக்கு இடையே இருக்கும். இப்போது a மற்றும் c ஆகியவற்றை எடுத்துக்கொண்டு, இதே சோதனையைத் திரும்பச் செய்யலாம். இவ்வாறு செய்யும்போது, எந்த இரண்டு தனித்தனி இயல் எண்களுக்கும் இடையே ஓர் இயல் எண்ணைக் காண்பிக்கமுடியும். அப்படியென்றால் எந்த இரண்டு இயல் எண்ணுக்கும் இடையே, பல பில்லியன், பல டிரில்லியன் எண்கள், முடிவில்லா எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள் உள்ளன என்று காண்பிக்கலாம்.

இப்போது தொடர்ச்சியான சார்பு என்றால் என்ன என்று பார்ப்போம். $x \in R$ (அதாவது, x என்னும் உறுப்பு, R என்னும் கணத்தில் உள்ளது என்று பொருள்) என்றும் $f(x)$ என்பது ஒரு சார்பு என்றும் $f(x) \in R$ என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். இந்தச் சார்பு, a என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக இருக்கவேண்டும் என்றால், இந்தப் புள்ளி a-யை சற்றே நகர்த்தினால், இதனால் f-ல் ஏற்படும் மாற்றம் ஓர் எல்லைக்கு உட்பட்டதாகவும் கட்டுப்படுத்தபடக்கூடியதாகவும் இருக்கவேண்டும். அதாவது, $f(a + \delta) - f(a) < \varepsilon$. இங்கே ε என்பது குறிப்பிட்ட முடிவுள்ள ஓர் எண். இங்கே, $\delta \to 0,$ என்றால், $\varepsilon \to 0$ என்பதை நோக்கிச் செல்லவேண்டும்.

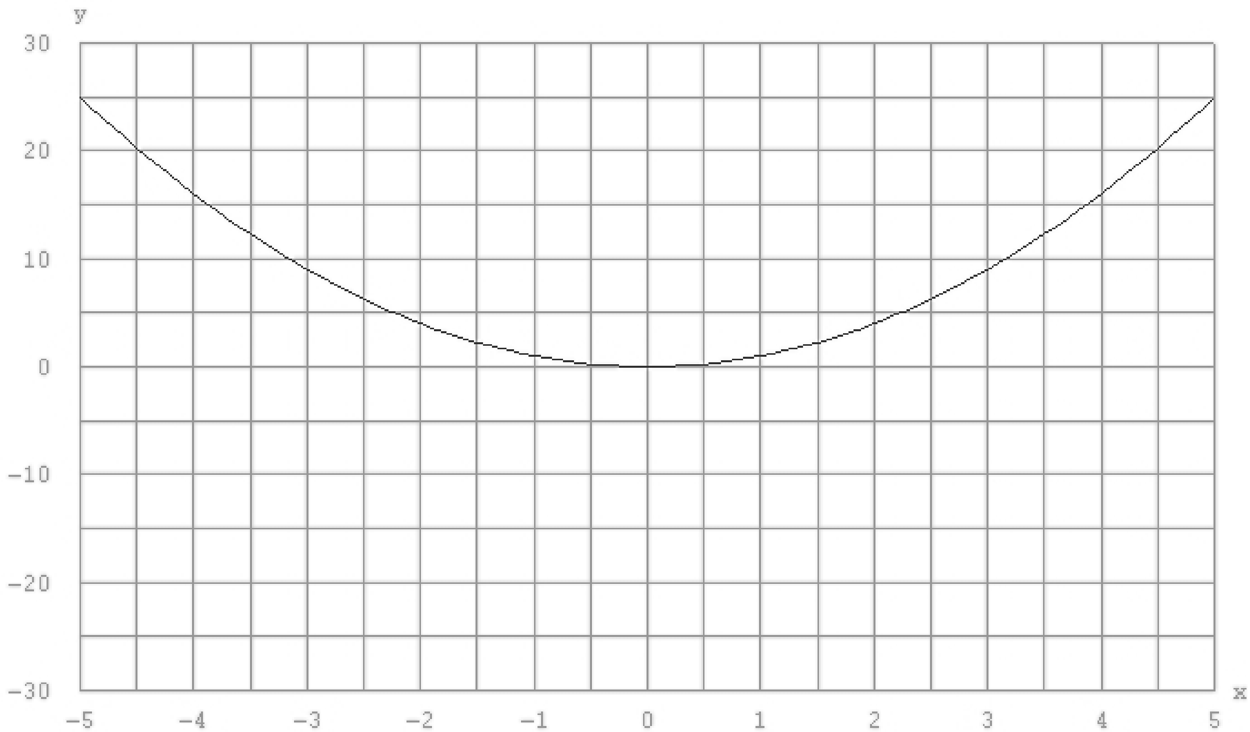
அப்படி இருந்தால், இந்தச் சார்பு a என்னும் இடத்தில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது என்று சொல்லலாம்.

இதே நிலைதான் ஒவ்வோர் இடத்திலும் என்றால் இந்தச் சார்பு, அதன் முழு சார்பகமான (domain) R-லும் தொடர்ச்சியானது என்று சொல்லலாம். பல சார்புகள், ஒரு சில புள்ளிகளைத் தவிர பிற இடங்களில் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும். உதாரணத்துக்கு, $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பு, $x = 0$ என்ற இடத்தைத் தவிர, எல்லா இடத்திலும் தொடர்ச்சியாக உள்ளது. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ என்ற சார்பு, $x = \pm 2$ ஆகிய இடங்களைத் தவிரப் பிற இடங்களில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

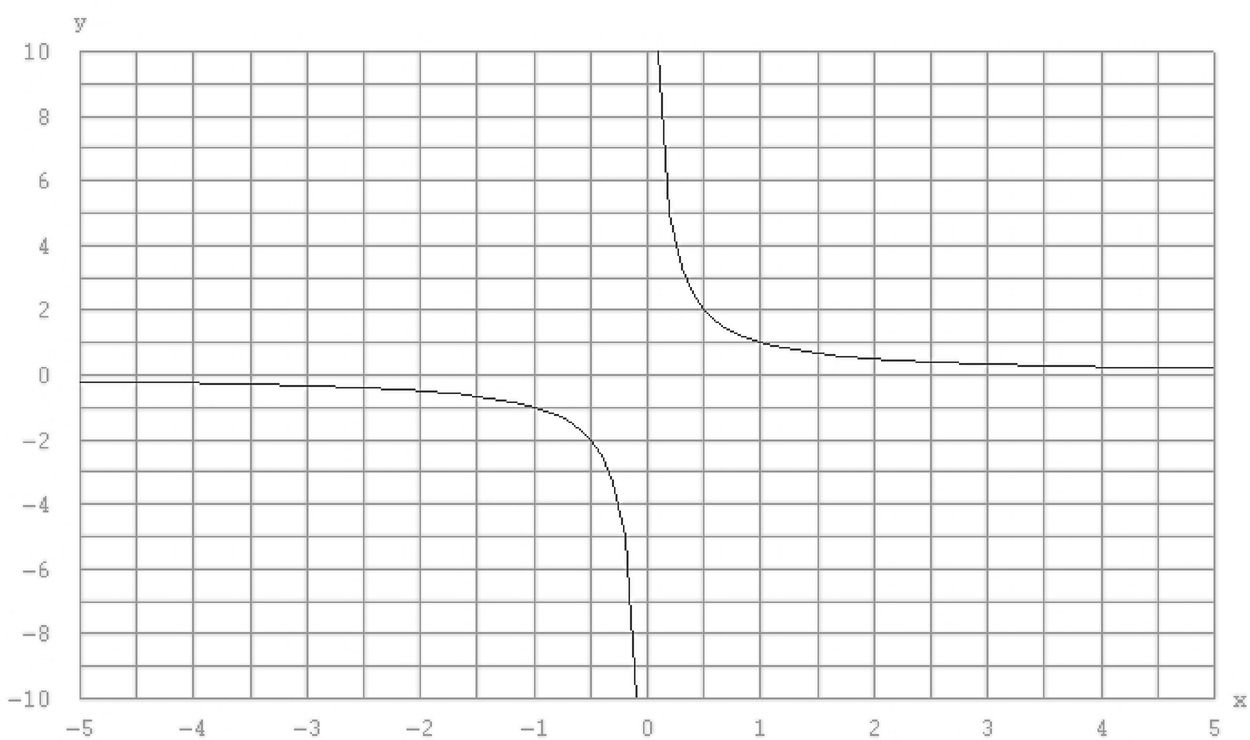
எங்கெல்லாம் ‘சுழியத்தால் வகுக்கும் நிலை' வருகிறதோ அங்கெல்லாம் கடுமையான தொடர்ச்சி உடைதல் ஏற்படுகிறது.

$f(x)$ என்பதின் மதிப்பு, x மாறும்போதெல்லாம் மாறுகிறது. $x \in R$ என்றும், சார்பு நன்றாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால், x மாறும்போது, இந்தச் சார்பு $f(x)$ என்பதைப் படமாக வரையமுடியும். தொடர்ச்சியில்லாத சார்புகளைக்கூடப் படமாக வரையமுடியும். ஆனால், தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளில் சார்பின் மதிப்பு முடிவிலியை நோக்கி விரைந்துசெல்லும்.

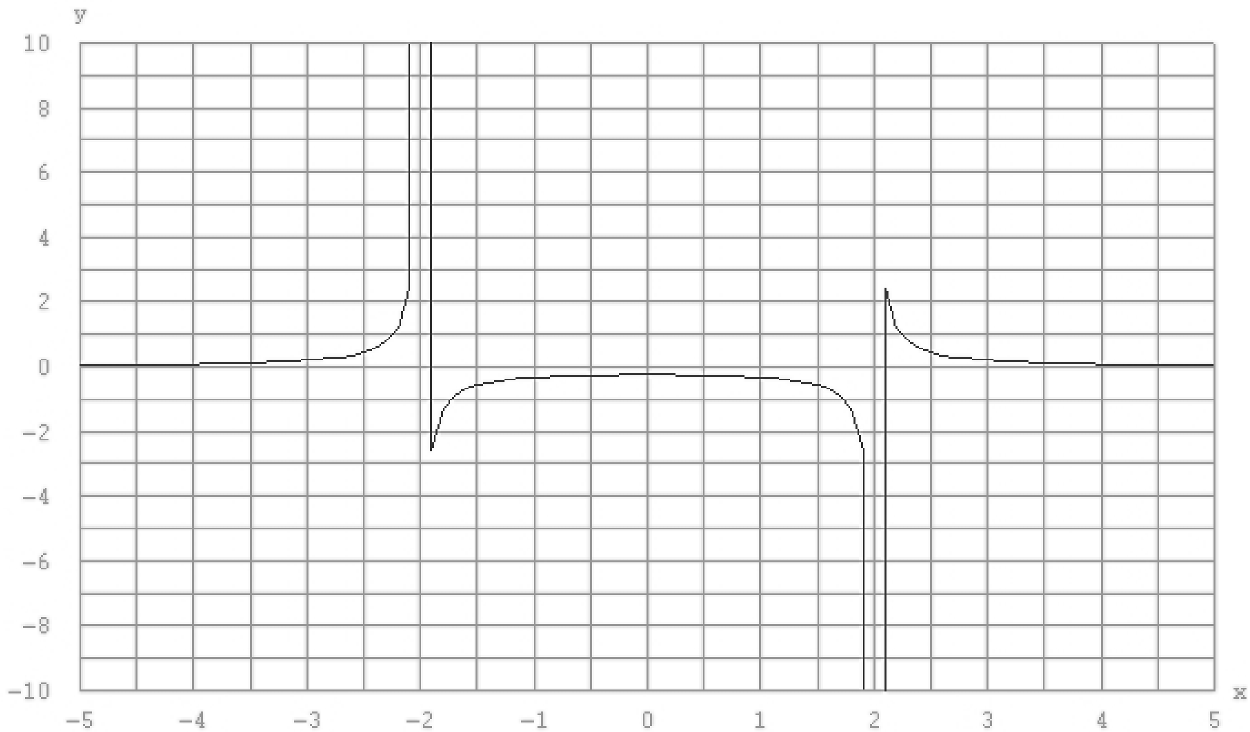
கீழே, நாம் இதுவரை பார்த்துள்ள சில சார்புகளின் படங்களைக் கொடுத்துள்ளேன். முதலில், அழகான, எளிமையான ஒரு சார்பு, $f(x) = x^2$



இது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு. இப்போது, $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள். இதில், $x = 0$ என்ற இடத்தில் தொடர்ச்சியின்மை உள்ளது.



கடைசியாக, இரண்டு இடங்களில் தொடர்ச்சியின்மை உள்ள சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம்: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$



மேலே உள்ள படத்தில் தொடர்ச்சியின்மை உள்ள இடங்களில் படம் சரியாக வரவில்லை. இதற்குக் காரணம் எனது படம் வரையும் மென்பொருள் ஊத்தி மூடியதுதான். இதிலிருந்தே, தொடர்ச்சியின்மை உள்ள இடங்கள் எவ்வளவு அபாயமானவை என்று நீங்கள் புரிந்துகொள்ளலாம்!

இப்போது, வகையீடு (derivatives) என்றால் என்ன என்று பார்ப்போம். நியூட்டன், இவற்றை fluxions என்று குறிப்பிட்டார். ஒரு சார்பு, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் எந்த அளவுக்கு மாறுகிறது என்பதைக் குறிப்பதே, அந்தப் புள்ளியில் அதன் வகையீடு ஆகும். $f(x)$ என்ற சார்பின் வகையீட்டை $\frac{df}{dx}$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

ஒரு சார்பு எங்கே தொடர்ச்சியற்று உள்ளதோ, அங்கே அதற்கு வகையீட்டை வரையறுக்கமுடியாது. ஒரு புள்ளியில் சார்புக்கு வகையீட்டைக் குறிப்பிடவேண்டும் என்றால், அந்தச் சார்பு அந்தப் புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக இருக்கவேண்டும். வகையீட்டை இவ்வாறு வரையறுக்கிறோம்:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

x என்னும் புள்ளிக்கு அருகில் சிறிது அசைவைக் கொடுங்கள். இதனால், சார்பு $f(x)$-ல் என்ன மாற்றம் ஏற்படுகிறது என்று பாருங்கள். இந்த மாற்றங்களுக்கு இடையேயான விகிதமே வகையீடு ஆகும். இந்த வகையீடே ஒரு சார்புதான். ஒரு சார்பு ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது என்றால், அதன் வகையீடும் அந்தப் புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக இருக்கும் என்று சொல்லமுடியாது.

சில சார்புகளின் வகையீடு என்ன என்று கண்டுபிடித்துப் பார்ப்போம். மேலே என்னென்ன உதாரணங்களைப் பார்த்தோமோ, அவற்றையே எடுத்துக்கொள்வோம்.

$f(x) = x^2$ என்பதை முதலில் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\left(\Delta x\right) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

அவ்வளவுதான்! ஆனால் எல்லா வகையீட்டுக் கணக்குகளுமே இவ்வளவு எளிதானவை அல்ல. இப்போது, $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்புக்கு வகையீட்டைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 + 2x\left(\Delta x\right) + (\Delta x)^2\right)}{x^2 (x+\Delta x)^2 \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\left(\Delta x\right) - (\Delta x)^2}{x^2 (x+\Delta x)^2 \Delta x}$$

அல்லது, $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x}{x^2 (x+\Delta x)^2} + \frac{-\Delta x}{x^2 (x+\Delta x)^2} = \frac{-2}{x^2}$

இதுகூட அவ்வளவு கடினமாக இல்லை. நாம் ஏற்கெனவே பார்த்ததுபோல, $x = 0$ என்ற இடத்தைத் தவிர பிற இடங்களில்தான் இதற்குப் பொருள் உண்டு. கொஞ்சம் அங்கே இங்கே சமன்பாட்டைத் தட்டிக் கொட்டினால் நனக்குத் தேவையான பதில் கிடைத்துவிடுகிறது. எப்போதும்போல, கடினமான கணக்கை நான் போடப்போவதில்லை. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ என்பதற்கான வகையீட்டை நீங்கள்தான் கண்டுபிடிக்கப்போகிறீர்கள்!